SESSION DE 1975

MATHÉMATIQUES

DURÉE : 4 heures. — COEFFICIENT : 2

Les quatre exercices proposés sont indépendants et peuvent être traités dans un ordre quelconque.

PREMIER EXERCICE

1° Soit f la fonction définie, pour x réel strictement supérieur à -1, par

$$f(x) = \int_0^{\pi} \frac{dt}{1 + x \sin t}$$

a. Calculer $f(x)$ en utilisant la variable $u = \operatorname{tg} \frac{t}{2}$.

On montrera que $f(x)$ est égal à $\frac{2 \operatorname{Arc\,cos} x}{\sqrt{1-x^2}}$ pour x inférieur à 1, et à $\frac{2 \operatorname{Arg\,ch} x}{\sqrt{x^2-1}}$ pour x supérieur à 1.

b. Etudier la continuité de f au point $x = 1$.

2° Soit a un nombre strictement positif. Calculer l'intégrale double :

$$I = \iint_D \frac{dx\,dt}{1 + x \sin t}$$

où D désigne l'ensemble des points du plan (x, t) tels que :

$$0 \leqslant x \leqslant a \quad \text{et} \quad 0 \leqslant t \leqslant \pi .$$

DEUXIÈME EXERCICE

Soient :

E un espace affine euclidien de dimension 3

$(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ un repère orthonormé de E

Ox, Oy, Oz les axes de vecteurs unitaires respectifs $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$.

Les coordonnées x, y, z d'un point M mobile dans E sont des fonctions du temps t qui vérifient le système différentiel :

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -2y + 2z \\ \dfrac{dy}{dt} = 2x - z \\ \dfrac{dz}{dt} = -2x + y \end{cases}$$

1° *a.* Sans calculer $x(t)$, $y(t)$ et $z(t)$, démontrer que les fonctions

$$x + 2y + 2z \quad \text{et} \quad x^2 + y^2 + z^2$$

sont des constantes.

b. En déduire que M appartient à un cercle fixe, dont on déterminera le centre et le rayon dans le cas particulier où :

$$x(0) = 0 \quad y(0) = 1 \quad z(0) = 2 .$$

2° On considère les vecteurs

$$\begin{cases} \vec{I} = \vec{i} + 2\vec{j} + 2\vec{k} \\ \vec{J} = \vec{j} - \vec{k} \\ \vec{K} = -4\vec{i} + \vec{j} + \vec{k} \end{cases}$$

et les axes OX, OY, OZ de vecteurs unitaires respectifs $\vec{I}$, $\vec{J}$, $\vec{K}$.

a. Démontrer que $(O, \vec{I}, \vec{J}, \vec{K})$ est un repère de E, orthogonal, et de même orientation que $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

b. Soient X, Y, Z les coordonnées de M par rapport à ce nouveau repère. Exprimer les dérivées $\frac{dX}{dt}$, $\frac{dY}{dt}$, $\frac{dZ}{dt}$ en fonction de X, Y, Z.

(*On utilisera les formules de changement de base pour les composantes d'un vecteur*).

c. Former une équation différentielle vérifiée par Y. En déduire les expressions de X(t), Y(t), Z(t), puis celles de $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$.

(*On ne cherchera pas à déterminer, en fonction des conditions initiales du mouvement, les constantes qui figurent dans ces expressions*).

TROISIÈME EXERCICE

Soient :

φ une fonction définie sur l'ensemble des réels strictement positifs, à valeurs réelles, deux fois dérivable;

f la fonction définie, sur $\mathbf{R}^2$ privé de son origine, par :

$$\begin{cases} f(x, y) = \varphi(u) \\ u = \sqrt{x^2 + y^2} \end{cases}$$

On suppose que f vérifie l'équation :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + kf = 0$$

où k est un réel donné.

1° Démontrer que φ vérifie l'équation :

(E) $$u\varphi''(u) + \varphi'(u) + ku\varphi(u) = 0.$$

2° Intégrer (E) lorsque $k = 0$.

3° Lorsque k est différent de zéro, trouver les séries entières dont la somme est solution de (E). En calculer le rayon de convergence.

QUATRIÈME EXERCICE

Dans un plan rapporté à un repère orthonormé Oxy, on considère la transformation ponctuelle T qui, à tout point m de coordonnées (x, y), associe le point M de coordonnées :

$$\begin{cases} X = x + e^x \cos y \\ Y = y + e^x \sin y \end{cases}$$

1° Trouver les transformées des droites d'équations $y = 0$ et $y = \pi$.

2° Construire avec soin la transformée de la droite d'équation $y = \frac{2\pi}{3}$.

3° Démontrer qu'il existe un point m_0 et un seul de Oy, dont le transformé a pour ordonnée $\frac{\pi}{2}$.

Démontrer que l'ordonnée y_0 de m_0 est comprise entre 0,8 et 0,9.

Donner une meilleure approximation de y_0 en appliquant à l'équation qui le définit la méthode de Newton au point 0,8.

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail